1

Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Echéance : vendredi 18 octobre 2024
Durée : 90 minutes

Blocs avec frottement

NOM :

PRENOM :

N° SCIPER :

SECTION : **Mathématiques**

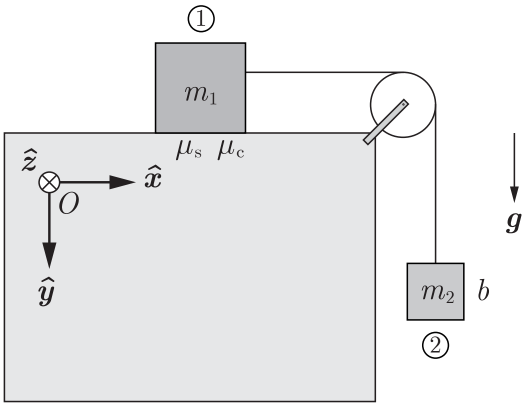
SALLE :

L'exercice à rendre comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques sont à effectuer sur les pages quadrillées.

Consignes

- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Les **réponses** sont à retranscrire sur les pointillés sous chaque question dans l'espace réservé à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas corrigées**.

1. Blocs avec frottement



Un bloc (1), considéré comme un point matériel de masse m_1, est posé sur un plan horizontal et attaché à un fil inextensible de masse négligeable qui passe au-dessus d'une poulie de masse négligeable. Un bloc (2), considéré comme un point matériel de masse m_2, est suspendu à l'autre extrémité du fil. Le fil se déplace avec le mouvement de rotation propre de la poulie sans glisser. Le frottement sec entre le bloc (1) et le plan horizontal est caractérisé par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement cinétique μ_c. Le frottement visqueux en régime laminaire entre le bloc (2) et l'air est caractérisé par le coefficient $b > 0$. Le temps caractéristique d'amortissement du système par frottement visqueux est,

$$\tau = \frac{m_1 + m_2}{b}$$

Pour décrire la dynamique du système, on choisit un repère cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ où le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{x}}$ est orienté le long de l'axe horizontal vers la droite, le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{y}}$ est orienté le long de l'axe vertical vers le bas et le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{z}}$ entre dans le plan vertical ci-dessus.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cartésiennes x_1, x_2 y_1, y_2, z_1 et z_2 des deux blocs et de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. Déterminer les équations scalaires du mouvement de chaque bloc compte tenu de la tension dans le fil.

Les vecteurs accélérations des blocs 1 et 2 s'écrivent,

$$\boldsymbol{a}_1 = \ddot{x}_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \ddot{y}_2\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{1}$$

Les forces extérieures exercées sur le bloc 1 en mouvement sont son poids $\boldsymbol{P}_1$, la force de réaction normale du plan $\boldsymbol{N}_1$, la tension $-\boldsymbol{T}_1$ et la force de frottement cinétique $\boldsymbol{F}_{f,1}$ qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes comme,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}_1 = m_1\,\boldsymbol{g} = m_1 g\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad &&\text{et} \qquad &&\boldsymbol{N}_1 = -\,N_1\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ &\boldsymbol{T}_1 = T_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad &&\text{et} \qquad &&\boldsymbol{F}_{f,1} = -\,\mu_c\,N_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{2}$$

La loi du mouvement du bloc 1 s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}_1^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{F}_{f,1} = m_1\,\boldsymbol{a}_1 \tag{3}$$

En substituant les expressions de l'accélération (1) et des forces extérieures (2) dans la loi vectorielle du mouvement (3) du bloc 1, et en la projetant le long des lignes de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$1 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad T_1 -\,\mu_c\,N_1 = m_1\ddot{x}_1 \tag{4}$$

$$1 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_1 g -\,N_1 = 0 \tag{5}$$

On peut s'affranchir de la norme de la force de réaction normale N_1 en combinant les équations (4) et (5). Ainsi, l'équation du mouvement du bloc 1 devient,

$$1 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad T_1 -\,\mu_c\,m_1 g = m_1\ddot{x}_1 \tag{6}$$

Les forces extérieures exercées sur le bloc 2 en mouvement sont son poids $\boldsymbol{P}_2$, la tension $-\boldsymbol{T}_2$ et la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_{f,2}$ qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes comme,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}_2 = m_2\,\boldsymbol{g} = m_2 g\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{T}_2 = -\,T_2 \\ &\boldsymbol{F}_{f,2} = -\,b\,\boldsymbol{v}_2 = -\,b\dot{y}_2\,\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned} \tag{7}$$

La loi du mouvement du bloc 2 s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}_2^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{F}_{f,2} = m_2\,\boldsymbol{a}_2 \tag{8}$$

En substituant les expressions de l'accélération (1) et des forces extérieures (7) dans la loi vectorielle du mouvement (8) du bloc 2, et en la projetant le long de la ligne de coordonnée verticale, on obtient l'équation scalaire suivante,

$$2 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_2 g -\,T_2 -\,b\dot{y}_2 = m_2\ddot{y}_2 \tag{9}$$

2. Donner la condition liant les dérivées temporelles secondes des coordonnées cartésiennes des blocs 1 et 2.

Pour un fil inextensible, la norme du vecteur accélération $\boldsymbol{a}_1$ du bloc 1 est égale à la norme du vecteur accélération $\boldsymbol{a}_2$ du bloc 2. Compte tenu des équations (1), cette condition s'écrit,

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = \|\boldsymbol{a}_2\| \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 \tag{10}$$

où $\ddot{x}_1 > 0$ et $\ddot{y}_2 > 0$.

3. Donner la condition liant les normes des tensions dans le fil.

Comme la masse de la poulie est négligeable, elle dévie uniquement le fil sans affecter autrement la dynamique du système. Par conséquent, l'opposé des tensions $-\boldsymbol{T}_1$ et $-\boldsymbol{T}_2$ exercées par le fil sur la poulie ont des normes égales,

$$\| - \boldsymbol{T}_1 \| = \| - \boldsymbol{T}_2 \| \qquad \text{ainsi} \qquad T_1 = T_2 \tag{11}$$

4. Déterminer l'équation du mouvement du système formé des deux blocs.

Compte tenu de la condition (10), l'équation du mouvement (6) du bloc 1 devient,

$$T_1 - \mu_c \, m_1 \, g = m_1 \ddot{y}_2 \tag{12}$$

La somme des équations du mouvement (9) et (12) s'écrit,

$$m_2 g - \mu_c \, m_1 \, g + T_1 - T_2 - b\dot{y}_2 = (m_1 + m_2)\, \ddot{y}_2 \tag{13}$$

Compte tenu de la condition sur les tensions (11) et du coefficient de frottement visqueux,

$$b = \frac{m_1 + m_2}{\tau} \tag{14}$$

on obtient l'équation du mouvement du système formé des deux blocs,

$$(m_2 - \mu_c \, m_1)\, g - (m_1 + m_2)\, \frac{1}{\tau}\, \dot{y}_2 = (m_1 + m_2)\, \ddot{y}_2 \tag{15}$$

5. Déterminer l'évolution temporelle $\dot{y}_2(t)$ de la coordonnée verticale de la vitesse du bloc 2 compte tenu du fait qu'il est initialement immobile, c'est-à-dire $\dot{y}_2(0) = 0$.

L'équation du mouvement du mouvement (15) est remise sous la forme suivante,

$$\ddot{y}_2 = -\frac{1}{\tau}\left(\dot{y}_2 - \left(\frac{m_2 - \mu_c \, m_1}{m_1 + m_2}\right) g\tau\right) \tag{16}$$

A l'aide du changement de variable,

$$u_2 = \dot{y}_2 - \left(\frac{m_2 - \mu_c \, m_1}{m_1 + m_2}\right) g\tau \qquad \text{où} \qquad \dot{u}_2 = \ddot{y}_2 \tag{17}$$

l'équation du mouvement (16) se réduit à,

$$\dot{u}_2 = -\frac{1}{\tau}\, u_2 \qquad \text{où} \qquad \dot{u}_2 = \frac{du_2}{dt} \tag{18}$$

qui peut être remise en forme comme,

$$\frac{du_2(t)}{u_2(t)} = -\frac{1}{\tau}\, dt \tag{19}$$

L'intégration de l'équation différentielle (19) du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit formellement,

$$\int_{u_2(0)}^{u_2(t)} \frac{du_2'(t')}{u_2'(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \tag{20}$$

La solution de l'équation intégrale (20) est,

$$\ln\left(\frac{u_2(t)}{u_2(0)}\right) = -\frac{t}{\tau} \tag{21}$$

d'où l'on tire l'évolution temporelle de la variable,

$$u_2(t) = u_2(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{22}$$

Compte tenu de la condition initiale $\dot{y}_2(0) = 0$, du changement de variable (17) et l'équation (22), on obtient alors l'évolution temporelle $\dot{y}_2(t)$ de la coordonnée verticale de la vitesse du bloc 2,

$$\dot{y}_2(t) = -\left(\frac{m_2 - \mu_c\, m_1}{m_1 + m_2}\right) g\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \left(\frac{m_2 - \mu_c\, m_1}{m_1 + m_2}\right) g\tau \tag{23}$$

6. Déterminer la vitesse scalaire limite $v_{2,\infty}$ de chute du bloc 2.

Solution 1 : En appliquant la définition de la vitesse limite à l'équation d'évolution temporelle (23) de la coordonnée verticale du bloc 2, on obtient,

$$v_{2\infty} = \lim_{t\to\infty} \dot{y}_2(t) = \left(\frac{m_2 - \mu_c\, m_1}{m_1 + m_2}\right) g\tau \tag{24}$$

Solution 2 : Dans la limite où le bloc 2 atteint sa vitesse scalaire limite de chute $v_{2,\infty} = \dot{y}_2$, son accélération est nulle, c'est-à-dire $\ddot{y}_2 = 0$. Ainsi, compte tenu du coefficient de frottement (14), l'équation du mouvement (15) se réduit dans cette limite à,

$$(m_2 - \mu_c\, m_1)\, g - \frac{m_1 + m_2}{\tau}\, v_{2\infty} = 0 \tag{25}$$

et la vitesse scalaire limite de chute s'écrit,

$$v_{2\infty} = \left(\frac{m_2 - \mu_c\, m_1}{m_1 + m_2}\right) g\tau \tag{26}$$

7. Déterminer la condition pour que le système formé des deux blocs et de la poulie reste immobile (c'est-à-dire en régime statique).

La force de frottement statique exercée par le plan sur le bloc 1 s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_{f,1} = -\, F_{f,1}\, \hat{\boldsymbol{x}} \tag{27}$$

La condition imposée pour que le bloc 1 soit en régime de frottement statique est,

$$F_{f,1} < \mu_s\, N_1 \tag{28}$$

A l'équilibre, la loi du mouvement (3) du bloc 1 se réduit à,

$$\sum \boldsymbol{F}_1^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{F}_{f,1} = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

Compte tenu des forces extérieures (2) et (27), les projections de l'équation d'équilibre (29) le long des lignes de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical s'écrivent,

$$1 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad -\, F_{f,1} + T_1 = 0 \tag{30}$$

$$1 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_1 g - N_1 = 0 \tag{31}$$

Compte tenu des équations (30) et (31), la condition (28) devient,

$$T_1 < \mu_s\, m_1 g \tag{32}$$

A l'équilibre, la loi du mouvement (8) du bloc 2 se réduit à,

$$\sum \boldsymbol{F}_2^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{0} \tag{33}$$

Compte tenu des forces extérieures (7) et (27), les projections de l'équation d'équilibre (33) le long de la ligne de coordonnée verticale s'écrit,

$$2 \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad m_2 g - T_2 = 0 \tag{34}$$

Compte tenu des équations (11) et (34), on obtient,

$$T_1 = T_2 = m_2 g \tag{35}$$

En substituant l'équation (35) dans la condition (32), celle-ci devient,

$$m_2 < \mu_s\, m_1 \tag{36}$$